

Ecole CIMPA-BURKINA FASO 2009

RESUMES DES MINI-COURS

Introduction à la K-théorie: Hervé Oyono (Clermont-Ferrand)

L'objectif de ce cours est de fournir les prérequis en K-théorie des algèbres d'opérateur nécessaires aux différents cours sur la théorie de l'indice. Il débutera par une rapide introduction à la théorie spectrale des C^* -algèbres.

Nous donnerons ensuite les définitions et les propriétés de base de la K-théorie et nous nous focaliserons sur les deux points suivants :

- les suites exactes en K-théorie.
- la périodicité de Bott.

Enfin nous finirons par la présentation sur des exemples de quelques techniques de calcul de groupes de K-théorie.

K-théorie et quelques applications : Adéremi Kuku (Univ.Iowa,USA)/(Nigéria)

Je centrerai le cours sur la théorie de l'indice en abordant les concepts suivants:

- 1) Le groupe de Grothendieck de catégories exactes avec nombre d'exemples-modules de type fini sur des anneaux incluant les anneaux de groupes, ordres, algèbres de Banach involutives, C^* -algèbres e.t.c; fibrés vectoriels tant topologiques. théorème de Serre-Swan, quelques applications.
- 2) Les bases de la K-théorie topologique incluant le théorème de périodicité de Bott, K-théorie pour les C^* -algèbres $\mathbb{Z}/2$ graduées vue comme K-théorie topologique, K-théorie comme théorie cohomologique généralisée, caractères de Chern, théorème d'Atiyah-Singer.
- 3) Les C^* -modules Hilbertiens et la théorie KK de Kasparov. L'application d'assemblage et la conjecture de Baum-Connes-applications et conséquences.

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer: Moulay Benameur (Metz)

Dans ce cours nous expliquerons le théorème de l'indice en K -théorie dans diverses situations géométriques. Nous nous intéresserons en particulier à des cadres où la théorie de Murray-von Neumann s'applique et donne des résultats intéressants. Ce cours sera accessible aux débutants dans le domaine ainsi qu'aux étudiants.

THEOREMES DE L'INDICE ET ANOMALIES: DENIS PERROT (LYON)

L'OBJECTIF DE CE COURS EST D'EXPOSER QUELQUES LIENS FONDAMENTAUX UNISSANT LA THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS ET LA GEOMETRIE NON-COMMUTATIVE. PLUS PRECISEMENT NOUS NOUS INTERESSERONS A L'ETUDE DES ANOMALIES CHIRALES EN THEORIE DE JAUGE, DU POINT DE VUE DES THEOREMES DE L'INDICE NON-COMMUTATIFS. CES DEUX SUJETS PEUVENT EN EFFET ETRE CONSIDERES COMME EQUIVALENTS, EN UN CERTAIN SENS. LES ANOMALIES CHIRALES SONT UNE MANIFESTATION DE L'IMPOSSIBILITE DE PRESERVER UNE SYMETRIE CLASSIQUE AU NIVEAU QUANTIQUE, A CAUSE DES PROBLEMES LIES A LA RENORMALISATION: CECI CONFERE UNE NATURE LOCALE AUX ANOMALIES. NOUS EXPLIQUERONS COMMENT CE PHENOMENE S'INTERPRETE EN UNE FORMULE

LOCALE DE L'INDICE, DANS L'ESPRIT DE CONNES ET MOSCOVICI. CELA NOUS FOURNIRA L'OCCASION D'INTRODUIRE QUELQUES NOTIONS DE BASE EN COHOMOLOGIE CYCLIQUE.

Groupeïdes et théorie de l'indice des espaces stratifiés: Jean-Marie Lescure (Clermont-Ferrand)

Ce cours a pour but d'expliquer comment l'introduction de groupeïdes permet la généralisation du théorème de l'indice d'Atiyah et Singer aux espaces stratifiés.

UNE INTRODUCTION AUX NOTIONS DE GROUPOÏDES, D'ESPACES STRATIFIES SERA DONNEE ET NOUS PASSERONS EN REVUE QUELQUES ASPECTS DE LA KK -THEORIE BIVARIANTE DE KASPAROV.

LE THEOREME CLASSIQUE D'ATIYAH ET SINGER POUR LES VARIETES CLOSES SERA ALORS RAPPELE PUIS REFORMULE A L'AIDE DE CES NOTIONS, ET NOUS VERRONS COMMENT CETTE REFORMULATION ACCEPTE LA PRESENCE DE SINGULARITES, MENANT A LA GENERALISATION ANNONCEE DU THEOREME DE L'INDICE.

POUR FINIR, D'AUTRES ASPECTS DE L'UTILISATION DES GROUPOÏDES DANS L'ETUDE DES ESPACES STRATIFIES SERONT ABORDES, EN PARTICULIER LA DUALITE DE POINCARÉ ET LA FONCTORIALITE DANS LE MAUVAIS SENS EN KK -THEORIE.

Quelques outils analytiques pour le théorème de l'indice : Sylvie Paycha (Clermont-Ferrand, France)

Nous rappellerons tout d'abord quelques notions géométriques comme la connexion de Clifford, la courbure, les formes de Chern-Weil. Nous démontrerons la formule de Bochner-Lichnerowicz qui est au coeur du théorème de l'indice analytique. Nous rappellerons par ailleurs certaines notions analytiques telles que les opérateurs différentiels illustrés par des opérateurs type Dirac ou Laplaciens généralisés, complétées par des propriétés d'opérateurs elliptiques sur des variétés compactes. Nous donnerons plusieurs manières d'exprimer l'indice d'un opérateur, qui mettent en jeu différents types de traces, en insistant sur la localité de la formule analytique de l'indice qui fait apparaître des formes de Chern-Weil.