

Rapport sur l'école CIMPA-UNESCO-MAROC

Géométrie riemannienne, Géométrie pseudo-riemannienne et Physique Mathématique

Marrakech, 19 - 31 mai 2008

Ahmad El Soufi

Participation

L'école a rassemblé 49 mathématiciens et mathématiciennes, débutants et confirmés (voir la liste de participants en annexe). La répartition géographique par institution d'affiliation des participants se présente comme suit:

Maroc	14
Algérie	10
France	13
Tunisie	2
Cameroun	1
Egypte	1
Liban	1
Iran	1
Oman	1
Grande Bretagne	1
Allemagne	1
U S A	3

La faible participation africaine, hors Maghreb, s'explique par le fait que le prix des billets d'avion entre Marrakech et les capitales africaines est très élevé. Malheureusement, il n'a pas été possible au CIMPA d'accorder une prise en charge totale de tous les billets d'avion pour les candidats venant d'Afrique, surtout que le financement attendu de la part de l'ICTP a fait défaut. Or, pour les candidats africains, une non prise en charge totale du billet d'avion implique généralement la non participation.

Conditions matérielles

L'école s'est entièrement déroulée au sein de la Faculté des Sciences et Techniques (FST) de l'université Cadi Ayyad de Marrakech. Pour les cours, nous avons disposé d'un amphithéâtre équipé de moyens de rétro projection et de vidéo projection. Le département de mathématiques, tout proche de l'amphi, a mis à notre disposition une salle informatique équipée de micro-ordinateurs et d'une connexion Internet très satisfaisante (WiFi compris), ainsi qu'une salle de travail équipée de tableau, qui accueillait également les pauses café. En somme, les conditions de

travail étaient très bonnes, dans un campus moderne et très agréable. Les stagiaires étaient logés à l'hôtel Al Hamra en face de la faculté, alors que les conférenciers étaient hébergés au Riad Omar en plein centre de Marrakech. Ce dernier offrait l'avantage d'être très bien placé mais présentait l'inconvénient d'être un peu bruyant, et peu confortable pour un séjour studieux de plus d'une semaine (en particulier, absence de bureau dans les chambres). Le repas de midi était pris collectivement chez un traiteur à deux pas de la FST. Le repas du soir était libre.

Une excursion programmée le samedi 24 mai dans l'Atlas a dû être annulée, faute de conditions météorologiques favorables.

Cours et exposés

La partie école proprement dite a comporté 10 cours : 5 cours par semaine à raison de 3 séances de 1h30 par cours (à l'exception d'El Kacimi qui n'a fait que deux séances et de Lehmann – Abouqateb qui en ont fait quatre). Nous avons réussi, en dépit des contraintes de dates des conférenciers, à programmer en première semaine quatre des cinq cours « basiques » comportant une partie introductive, à savoir les cours de El Kacimi sur la cohomologie, de Lehmann et Abouqateb sur les fibrés et connexions, de Baum sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes et de Zeghib sur les algèbres de Lie unimodulaires de dimension 3. Le cours de Ikemakhen introduisant les spineurs et l'opérateur de Dirac, a été donné en seconde semaine. L'aspect « géométrie et physique » a fait l'objet des cours de Chrusciel sur les trous noirs dans les modèles de Schwarzschild, de Kerr et d'Empanan-Reall, de Isenberg sur l'équation d'Einstein en relativité générale et les diverses méthodes de construction de solutions, et de Harrell sur l'influence de la géométrie dans certains modèles mathématiques de la mécanique quantique. Le cours de Pacard était consacré à l'existence de petits domaines critiques pour des fonctionnelles géométriques comme l'aire ou la première valeur propre du laplacien. Celui de Béguin, qui continuait le cours de Zeghib, a montré comment, dans le cadre de la cosmologie de Bianchi, l'équation d'Einstein se réduit à une EDO d'ordre 2 dont on peut étudier la dynamique.

En plus des cours, le GGTM (Groupement pour le développement de la Géométrie et la Topologie au Maghreb), qui est associé à l'organisation de l'école, a organisé les « Journées de Géométrie et Topologie » avec comme principal partenaire la cité des Géométries de Maubeuge. Cinq conférences d'une heure ont été données dans le cadre de ces journées et ont été toutes programmées la première semaine en plus des cours. En plus de ces conférences, l'exposition itinérante « Boules et Bulles » a été installée dans les locaux de la FST.

Enfin, trois exposés courts (40 minutes) ont été demandés durant l'école à Malika Ait Ben Haddou (Maroc), Malek Fereshteh (Iran) et El Mamouni Ismail (Maroc).

A l'initiative d'Abdelghani Zeghib, une réunion de travail a été organisée le week-end et a regroupé, en plus de Zeghib et quelques chercheurs confirmés, une bonne quinzaine de jeunes stagiaires. Cinq d'entre eux ont exposé, de manière informelle, leurs travaux et des discussions et échanges ont eu lieu.

Assiduité aux cours :

L'assiduité fut globalement satisfaisante malgré une baisse sensible en seconde semaine due à deux facteurs : d'une part certains participants marocains avaient encore des cours à donner ou des examens à faire passer, ils n'ont pu se libérer qu'une semaine sur les deux. D'autre part, les cours étaient majoritairement donnés en anglais (3 sur 5 la seconde semaine), ce qui au Maghreb, pose encore quelques problèmes. Nous considérons que la prise de conscience par les jeunes

maghrébins de l'importance de l'anglais comme langue de communication en mathématiques est l'un des points positifs de l'école.

Le niveau, le rythme et les contenus des cours semblent avoir été bien adaptés au public. Les exposés étaient d'ailleurs souvent interrompus par des questions pertinentes du public. Les nombreuses citations croisées entre les différents conférenciers montrent qu'il y avait à la fois cohérence et complémentarité thématiques entre les cours. Nous pensons aussi que l'objectif de l'école relatif à l'établissement de contacts entre les différents participants a été atteint et espérons que ceux-ci aboutissent à des collaborations durables.

Pour le comité d'organisation

Ahmad El Soufi

Annexes

Liste des cours

Abdelhak Abouqateb (Université Cadi-Ayyad, Marrakech) and Daniel Lehmann (Université de Montpellier):

Title: Principal bundles and connections

Abstract: In this course, we will introduce the basic material on principal bundles and connections in view of its applications in mathematical physics.

Helga Baum (Humboldt-Universität Berlin):

Title: Introduction to holonomy theory of Riemannian and Lorentzian manifolds

Abstract: In this course, we will introduce basic material on holonomy groups of (pseudo)-Riemannian manifolds. After presenting the long known classification results in the Riemannian case, we will focus on recently obtained classification results for Lorentzian holonomy groups and discuss local and global Lorentzian metrics with special holonomy. We will also explain the relation between holonomy groups and special spinor fields.

François Béguin (University Paris VI, France) and Abdelghani Zeghib (ENS Lyon, France):

Title: Constant curvature spacetimes

Abstract: The study of constant curvature spacetimes allows one to introduce certain notions and problems of Global Lorentzian Geometry in a quite simplified context. Indeed, constant curvature spacetimes may exhibit a very rich topology and global geometry, but have — by definition — a trivial local geometry.

François Béguin (University Paris VI, France) and Abdelghani Zeghib (ENS Lyon, France):

Title: Bianchi Cosmological models

Abstract: Bianchi cosmological models are spatially homogenous spacetimes. More precisely, they are manifolds of the form $M = I \times G$ where I is an interval and G is a Lie group, endowed with a Lorentzian metric of the form $-dt^2 + g_t$ where (g_t) is a family of left-invariant Riemannian metrics on G . The physical content of a spacetime M is encoded by a non-linear PDE on its Lorentz metric: the so-called Einstein equation. The first goal of our course will be to explain why, in the context of Bianchi cosmological models, this PDE reduces to a second order ordinary differential equation on the family of metrics (g_t) . Then we will show that, for certain Lie groups G , this equation has a rather simple dynamics, whereas in some other cases, it exhibits a very rich and chaotic dynamics (which is still not fully understood). We think that the main interest of the course on Bianchi Cosmological Models is that it stands at the crossroad of a wide variety of mathematical and physical fields : Cosmology, Global Riemannian and Lorentzian Geometry, PDE's, Dynamical Systems Theory, Lie Groups Theory,...

Piotr Chrusciel (Université François Rabelais, Tours and University of Oxford):

Title: Introduction to black holes

Abstract: In this mini-course we will introduce and briefly describe the Schwarzschild, Kerr, and Emparan-Reall black holes. We will present the key theorems of black hole theory: topological censorship, area, and topology theorems. We will prove uniqueness of static vacuum black holes.

Aziz El Kacimi (Université de Valenciennes):

Title: Hodge-de Rham Theory

Evans Harrell (Georgia Institute of Technology, Atlanta)

Title: Mathematics of quantum mechanics on thin structures.

Abstract: Microelectronic devices known as quantum wires and waveguides are in production on scales where the electrons are subject to quantum effects and described with the Schrödinger equation. These devices are macroscopic in one or two dimensions but on the scale of nanometers in at least one dimension.

The course will begin a discussion of some current research in nanophysics laboratories and the mathematical models used in the field. The idealization of a thin domain in quantum mechanics as a restriction to a submanifold is one of the more important models, so careful asymptotics will be carried out for this model. The geometry of the submanifold will contribute explicitly to an effective potential in the limiting Schrödinger equation.

Spectral theory of elliptic PDEs will be reviewed and applied to Schrödinger operators on manifolds. The effect of the geometry on the eigenvalues (energy levels) will be investigated with a variety of techniques, some variational and some purely algebraic, including "sum rules" for the spectra and "universal bounds" on eigenvalues. Special features of the Schrödinger operators of quantum wires and waveguides will be considered from physical, geometric, and analytical points of view. Connections will be made to isoperimetric theorems, Weyl asymptotics (asymptotics for high energies), and semiclassical approximation. The latest known results of these types will be explained.

Aziz Ikemakhen (Université Cadi-Ayyad, Marrakech)

Title: Introduction to spinorial geometry

Abstract: In this course, we introduce Clifford algebras and their representations, the spin groups and their representations. We introduce the notion of spin structure and spin structures on a manifold and construct the spinorial bundles and their canonical connections.

Jim Isenberg (University of Oregon)

Title: Finding Solutions of the Einstein Constraint Equations

Abstract: The initial value approach is the most widely used method for finding and studying solutions of the Einstein gravitational field equations, and the first step in carrying out an initial value construction is to solve the Einstein constraint equations. In this set of lectures, we discuss some of the methods which have been developed for studying the constraint equations and their solutions. We particularly focus on the conformal and conformal thin sandwich methods, and on gluing techniques.

Frank Pacard (University Paris XII)

Title: Concentration Phenomena in Various Isoperimetric Problems

Abstract : On s'intéresse, sur une variété Riemannienne de dimension $n + 1$, à l'existence de solutions pour les problèmes suivants :

- La recherche des hypersurfaces à courbure moyenne constante (qui peuvent être vues comme des points critiques de la fonctionnelle "aire" sous une contrainte de "volume").
- La recherche des domaines critiques pour la première valeur propre du Laplacien (avec données de Dirichlet au bord).

Dans chaque cas on commencera par montrer le rôle joué par les points critiques de la courbure scalaire de la variété ambiante dans la construction de solutions qui se concentrent en des points.

Ensuite, on montrera le rôle joué par les sous variétés minimales dans la construction de solutions qui se concentrent le long d'objets de plus grande dimension. On terminera par une série de problèmes ouverts.

Liste des participants

<i>Nom & Prénom</i>	<i>Université</i>	<i>E-mail</i>
ABCHIR Hamid	Ecole supérieure de technologie, Casablanca Maroc	Abchir@est-uh2c.ac.ma
ABOUQATEB Abdelhak	Faculté des sciences et techniques Marrakech	abouqateb@fstg-marrakech.ac.ma
AIT BEN HADDOU Malika	Faculté des sciences Meknes, Maroc	maitbenha@gmail.com
BAHAYOU Amine	Université de Ouargla, Algérie	Amine_bahayou@yahoo.fr
BAUM Helga	Humboldt University Berlin, Allemagne	baum@mathematik.huberlinde
BEGUIN François	Université Paris Sud, France	Francois.beguin@math.u-psud.fr
BELKHIRAT Abdelhadi	Dhofar University, Algérie	abelkhirat@yahoo.fr
BEN AHMAD Ali	Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie	benahmedal@gmail.com
BENAYADI Saïd	Université Paul Verlaine-METZ, France	benayadi@univ-metz.fr
BENMOUHOUB Naïma	USTHB. Alger	benmouhoubn@gmail.com
BENMOUSSA Tayeb	Université de Ouargla, Algérie	benmoussa_1969@yahoo.fr
BENROUMANE Abderazzak	Université Cadi Ayyad – FSTG Marrakech	benreman@yahoo.fr
BOUAYADI Abderrazak	Université Cadi Ayyad – FSTG Marrakech	El-bouayadi@hotmail.fr
BOUCETTA Mohamed	Faculté des sciences et techniques Marrakech	mboucetta2@yahoo.fr
CHERGUI Brahim	Hassan II – Ain chok – Casa Maroc	cherguibrahim@yahoo.fr
CHRUSCIEL Piotr	Université François Rabelais Tours et Université d'Oxford	chrusciel@maths.ox.ac.uk
DIDA Hamou	Centre universitaire Saida, Algérie	didamohammed@yahoo.fr
EL Mamouni Ismail	Maroc	
EL KACIMI Aziz	Université de Valenciennes, France	Aziz.ElKacimi@univ-valenciennes.fr
EL SOUFI Ahmad	Université de Tours-France	elsoufi@univ-tours.fr
EL WASSOULI Fouzia	Université Ibn Tofaïl Maroc	elwassouli@gmail.com
GAMARA Najoua	Faculté des sciences de Tunis, Tunisie	ngamara7@gmail.com
GANBOURI Bousselham	Faculté des Sciences-Kénitra-Maroc	g.busslem@gmail.com
GRIN Richard	Représentant CIMPA	grin@unice.fr
HARREL Evans	Georgia Institute of Technology, Atlanta USA	harrell@math.gatech.edu
HATHOUT Fouzi	Centre universitaire Saida, Algérie	f.hathout@caramail.com
HIJAZI Oussama	Université de Nancy, France	Oussama.Hijazi@iecn.u-nancy.fr
IKEMAKHEN Aziz	Faculté des sciences et techniques Marrakech	ikemakhen@fstg-marrakech.ac.ma
ISENBERG Jim	University of Oregon, USA	jim@newton.uoregon.edu
JBILOU Asma	Université de Nice Sophia-Anti polis, France	jbilou@math.unice.fr
LABIB Youssef Nabil	Cairo University, Egypte	nlyoussef2003@yahoo.fr
LAURENT Bakri	Université de Brest, France	bakri@univ-brest.fr
LEHMANN Daniel	Université de Montpellier 2, France	lehmann@math.univ-montp2.fr
MALEK FERESHTECH	University of Technology Teheran, Iran	malek@kntu.ac.ir
MAMOUNI My Ismaïl	Classes prepa, Casa. Univ Hassan II, casa	Myismail1@menara.ma
MANSOURI Wadia	Univ Ibn Tofaïl, Kénitra-MAROC	mansouriwadia@yahoo.fr
MDJERAB Ouardia	Ecole supérieure de commerce, Alger	ouardia_m@hotmail.com
MELNICK Karin	Yale University, USA	karin.melnick@yak.edu
MOUKADDEM Nazih	U. libanaise.Fac.des sciences III, Liban	hmoukadem@hotmail.com
OUAKKAS Seddik	Centre Univ de SAIDA – Algérie	souakkas@yahoo.fr
OUSSALAH Malika	USTHB Alger	oussalah_m@yahoo.fr
PACARD Frank	Université Paris XII	pacard@univ-paris12.fr
RAOUYANE Mohamed	Ecole Normale Supérieure Rabat – Maroc	m.raouyane@yahoo.fr
RECHER François	Université Lille I, France	Francois.Recher@math.univ-lille1.fr
ROUCHDI Ilham	Faculté des sciences Rabat	irouchdi@yahoo.fr
SMAI Djamel	USTHB Alger	Djamel_smai@yahoo.fr
TAGNE WAFO Roger	Université de Douala, Cameroun	rtagnewafo@yahoo.com
VASSALO Valerio	Université Lille I, France	Valerio.Vassalo@math.univ-lille1.fr
ZEGHIB Abdelghani	Ecole Normale Supérieure Lyon France	Abdelghani.ZEGHIB@umpa.ens-lyon.fr
Ziat Mohamed	Faculté des sciences Semlalia Marrakech	ziat_maths@hotmail.com