

SOLUCIONES RENORMALIZADAS DE EDP ELIPTICAS NO LINEALES

François MURAT

C.N.R.S., Laboratoire d'Analyse Numérique,
Université P. & M. Curie (Paris VI)

RESUMEN

En este trabajo, se introduce un nuevo concepto de solución de EDP elíptica no lineal (solución renormalizada) que sustituye al concepto de solución débil habitual cuando el segundo miembro está sólo en L^1 . Se demuestra un resultado de existencia y unicidad de solución.

Redactado por: B. CLIMENT

Revisado por: E. FERNÁNDEZ-CARA

Préface

Au cours du mois de mai 1992 j'ai eu la chance d'être invité à l'Université de Séville pour une période de deux semaines. Ce séjour fort agréable m'a donné l'occasion non seulement de visiter cette ville et l'Exposition Universelle, mais encore de donner des cours sur l'homogénéisation, la compacité par compensation et les solutions renormalisées d'équations elliptiques.

Les notes qui suivent reprennent les cours que j'ai donnés sur le dernier sujet. C'est là un événement nouveau à deux titres. D'une part, elles représentent la première version imprimée de résultats obtenus en collaboration avec Pierre Louis Lions au printemps 1990 et qui, malgré leur caractère novateur, n'ont pas encore été publiés par ailleurs. D'autre part, il s'agit là de ma première publication en espagnol !

Ces notes ont été rédigées par B. Climent, et révisées par E. Fernández-Cara. Qu'ils en soient tous deux remerciés. Que soient aussi remerciés Juan Casado-Díaz, Tomás Chacón, Enrique Fernández-Cara et José D. Martín-Gomez pour m'avoir invité à Séville et y avoir rendu mon séjour aussi agréable.

Paris, le 15 février 1993.

Prefacio

En el mes de mayo de 1992 tuve la suerte de ser invitado, durante dos semanas, por la Universidad de Sevilla. Esta estancia tan agradable me permitió no sólo visitar la ciudad y la Exposición Universal, sino también impartir varios cursos sobre homogeneización, compacidad por compensación y soluciones renormalizadas de ecuaciones elípticas.

Las notas siguientes recogen el último de los temas tratados. Es algo nuevo en dos aspectos. Por una parte, representa la primera versión escrita de los resultados obtenidos, en el verano de 1990, en colaboración con Pierre Louis Lions, que, a pesar de su carácter innovador, no han sido todavía publicados. Por otra parte, es mi primera publicación en español !

Estas notas han sido redactadas por B. Climent, y revisadas por E. Fernández-Cara. Reciban ambos mi agradecimiento. Asimismo, quiero dar las gracias a Juan Casado-Díaz, Tomás Chacón, Enrique Fernández-Cara y José D. Martín-Gomez por haberme invitado a Sevilla y haber hecho mi estancia tan agradable.

Paris, 15 de febrero de 1993.

1 INTRODUCCION

En este trabajo, se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u) - \nabla \cdot \Phi(u) + \lambda u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, $N \geq 2$, $A \in L^\infty(\Omega)^{N^2}$, $A \geq \alpha I$ con $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\Phi \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})^N$ (sin hipótesis de crecimiento) y $f \in L^1(\Omega)$.

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente

Teorema 1.1 *Existe una única función u , solución del problema anterior en un sentido que precisaremos más adelante (cf. Definición 2.1), que depende continuamente de $f \in L^1(\Omega)$.*

Utilizando la Definición 2.1, el problema está entonces bien planteado en el sentido de Hadamard.

Nota 1.1 En general, tenemos un problema no lineal, pero incluso en el caso lineal ($\Phi \equiv 0$) obtendremos resultados interesantes, como unicidad de solución en el sentido de la Definición 2.1.

Nota 1.2 En relación con este problema, encontramos ya una primera dificultad fundamental: Dado que tan sólo $f \in L^1(\Omega)$, la solución no tiene por qué pertenecer a $H_0^1(\Omega)$. En efecto, veamos que ni siquiera cuando $\Phi \equiv 0$ tiene sentido esperar tal cosa. En este caso, el problema se reduce a

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u) + \lambda u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

El operador $u \rightarrow -\nabla \cdot (A\nabla u) + \lambda u$ es un isomorfismo entre $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$. Ahora bien, existen funciones de $L^1(\Omega)$ que no pertenecen a $H^{-1}(\Omega)$ para $N \geq 2$; en consecuencia, la solución de (1.2) no puede, en general, pertenecer a $H_0^1(\Omega)$. Veamos pues que es necesario precisar el espacio en el que está la solución. Se puede demostrar (cf. Boccardo-Gallouet [4],[5] y la Nota 2.5 más abajo) que ésta pertenece a $W_0^{1,q}(\Omega)$ para cada $q < \frac{N}{N-1}$. Daremos sin embargo más adelante una definición más precisa del espacio en el que demostraremos existencia y unicidad de solución.

Nota 1.3 Una segunda dificultad que aparece en (1.1) consiste en dar un sentido a la ecuación y, en particular, a $\Phi(u)$, para poder hablar propiamente de $\nabla \cdot \Phi(u)$.

Obsérvese que, aún suponiendo que la solución $u \in H_0^1(\Omega)$, no tiene por qué ocurrir que $\Phi(u)$ esté en $L_{loc}^1(\Omega)^N$. Haría falta, en principio, una hipótesis de crecimiento sobre Φ . En efecto, sabemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, donde $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ si $N \geq 3$ y 2^* es cualquier número finito si $N = 2$. El procedimiento habitual para conseguir dar un sentido distribucional a $\Phi(u)$ para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ se basa en imponer que Φ verifique una desigualdad del tipo $|\Phi(u)| \leq C(1 + |u|^{2^*})$. En tal caso, $|\Phi(u)|$ sería una función medible acotada por una función de L^1 ; por tanto, se tendría que $\Phi(u) \in L^1(\Omega)^N$ y la divergencia $\nabla \cdot \Phi(u)$ podría ser definida en la forma distribucional habitual:

$$\langle \nabla \cdot \Phi(u), \varphi \rangle = - \langle \Phi(u), \nabla \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \left(\sum_i \Phi_i(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

No obstante, no será éste el camino. Seguiremos sin imponer a Φ hipótesis de crecimiento. Esto va a estar relacionado con el sentido que se dará a la ecuación (1.1), que no será el sentido débil habitual (sentido de las distribuciones). Utilizaremos en efecto, una clase de funciones “test” más grande que $\mathcal{D}(\Omega)$ que contendrá funciones no lineales que dependen de la propia solución. Esta definición nueva es importante incluso cuando $\Phi \equiv 0$, porque permite llegar a resultados de unicidad.

Nota 1.4 El problema que se presenta aquí es lineal, al menos en lo que concierne a su parte principal $-\nabla \cdot (A \nabla u) + \lambda u$, pero los resultados que siguen pueden ser obtenidos con las mismas técnicas para operadores de Leray-Lions $-\nabla \cdot F(x, u, \nabla u)$ (continuos en u y monótonos en ∇u) que operan de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en su dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ para un cierto p con $1 < p < +\infty$. Para los resultados de unicidad, es necesario añadir a las hipótesis clásicas de Leray-Lions una hipótesis de Hölder-continuidad en u .

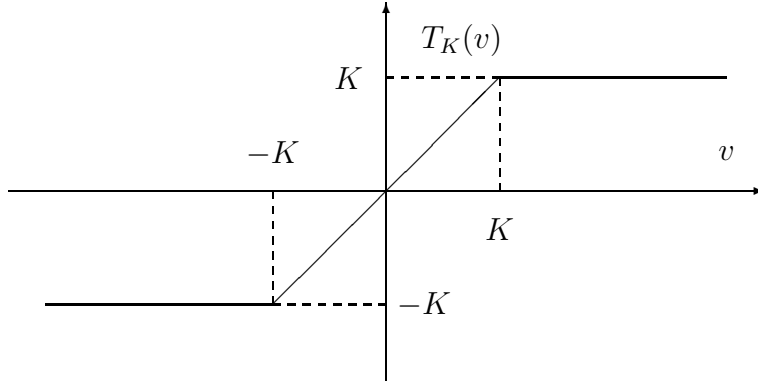
Se puede demostrar de hecho la existencia de solución (en el sentido de la Definición 2.3) para cualquier $\lambda \geq 0$. La unicidad es cierta para $\lambda \geq 0$ cuando $\Phi \equiv 0$ y cuando $-\nabla \cdot F(x, u, \nabla u)$ no depende de u .

Nota 1.5 El concepto de solución renormalizada (cf. la sección siguiente) fue introducido por R. DiPerna y P.L. Lions en el contexto de la ecuación de Boltzmann. El resultado que se presenta aquí se debe a P.L. Lions y F. Murat [7]. Los primeros resultados de existencia en un marco análogo ($f \in H^{-1}(\Omega)$) fueron dados por Boccardo, Díaz, Giachetti y Murat en [2] y [3].

2 SOLUCIONES RENORMALIZADAS

En lo que sigue utilizaremos las funciones “truncantes” $T_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas como sigue:

$$T_K(t) = \begin{cases} -K & \text{si } t \leq -K, \\ t & \text{si } -K \leq t \leq K, \\ K & \text{si } t \geq K. \end{cases}$$



Supongamos Ω , A , λ , Φ y f dadas en las condiciones de la sección precedente.

Definición 2.1 *u se dice solución renormalizada de (1.1) si:*

1. *u verifica lo siguiente:*

$$\begin{aligned} u &\in L^1(\Omega), \\ T_K(u) &\in H_0^1(\Omega) \quad \forall K > 0, \\ \frac{1}{n} \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2 &\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

2. *Para todo $K > 0$ y para todo $\beta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ con β' de soporte compacto y contenido en $[-K, K]$,*

debe tenerse

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\beta'(u)A\nabla u) + \beta''(u)\nabla u \cdot A\nabla u \\ -\nabla \cdot (\beta'(u)\Phi(u)) + \beta''(u)\nabla u \cdot \Phi(u) \\ \quad + \lambda u \beta'(u) \end{cases} = f\beta'(u) \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.4}$$

Nota 2.1 Veamos que si u verifica (2.3) y β es como antes, todos los términos de (2.4) son verdaderamente distribuciones:

(i) Como $\text{Sop}(\beta') \subset [-K, K]$, tenemos $\beta'(u)A\nabla u = \beta'(T_K(u))A\nabla T_K(u)$. Luego

$$\beta'(u)A\nabla u \in L^2(\Omega)^N \quad y \quad \nabla \cdot (\beta'(u)A\nabla u) \in H^{-1}(\Omega).$$

(ii) Como $\beta'(T_K(u)) \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned} \beta''(u)\nabla u \cdot A\nabla u &= \beta''(T_K(u))\nabla T_K(u) \cdot A\nabla T_K(u) \\ &= \nabla \beta'(T_K(u)) \cdot A\nabla T_K(u) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

(iii) De nuevo, podemos escribir $\beta'(u)\Phi(u) = \beta'(T_K(u))\Phi(T_K(u))$. Tenemos que

$$\Phi(T_K(u)) \in H^1(\Omega)^N \cap L^\infty(\Omega)^N$$

y, en particular,

$$\frac{\partial \Phi(T_K(u))}{\partial x_i} = \Phi'(T_K(u)) \frac{\partial T_K(u)}{\partial x_i}$$

donde el primer factor está en $L^\infty(\Omega)^N$ y el segundo en $L^2(\Omega)$. Así, también se tiene que $\beta'(u)\Phi(u) \in H^1(\Omega)^N \cap L^\infty(\Omega)^N$ y $-\nabla \cdot (\beta'(u)\Phi(u)) \in L^2(\Omega)$.

(iv) Dado que $\beta''(T_K(u)) \in L^\infty(\Omega)$,

$$\beta''(u)\nabla u \cdot \Phi(u) = \beta''(T_K(u))\nabla T_K(u) \cdot \Phi(T_K(u)) \in L^2(\Omega).$$

(v) $\lambda u\beta'(u) = \lambda T_K(u)\beta'(T_K(u)) \in L^\infty(\Omega)$.

(vi) $f\beta'(u) \in L^1(\Omega)$.

Nota 2.2 Una definición equivalente se dará en la sección 5 (Definición 5.1).

Nota 2.3 En principio, (2.4) es una igualdad en $\mathcal{D}'(\Omega)$. No obstante, dado que todos los términos que aparecen (salvo posiblemente el primero de ellos) son realmente funciones de $L^1(\Omega)$, deducimos:

- Si u es solución renormalizada de (1.1) y β está en las condiciones precedentes, entonces $\nabla \cdot (\beta'(u)A\nabla u) \in L^1(\Omega)$,
- En tales condiciones, la igualdad (1.1) ha de cumplirse en el sentido de $L^1(\Omega)$, es decir c.p.d. en Ω .

Nota 2.4 Para obtener la expresión (2.4) lo que se hace es partir de la EDP de (1.1), multiplicarla puntualmente (sin integrar por partes) por $\beta'(u)$ (con β arbitraria pero en las condiciones precedentes) y efectuar cálculos formales. Así,

$$-\beta'(u)\nabla \cdot (A\nabla u) - \beta'(u)\nabla \cdot \Phi(u) + \lambda\beta'(u)u = f\beta'(u); \quad (2.5)$$

Formalmente

$$\nabla \cdot (\beta'(u)A\nabla u) = \sum_k \frac{\partial(\beta'(u)A\nabla u)}{\partial x_k} = \beta''(u)\nabla u \cdot A\nabla u + \beta'(u)\nabla \cdot (A\nabla u).$$

Luego

$$-\beta'(u)\nabla \cdot (A\nabla u) = -\nabla \cdot (\beta'(u)A\nabla u) + \beta''(u)\nabla u \cdot A\nabla u.$$

Análogamente,

$$-\beta'(u)\nabla \cdot \Phi(u) = -\nabla \cdot (\beta'(u)\Phi(u)) + \beta''(u)\nabla u \cdot \Phi(u)$$

y obtenemos formalmente (2.4) a partir de (2.5).

Nota 2.5 En el caso particular en que $\Phi \equiv 0$, veamos que, si u es solución renormalizada, entonces es solución débil en el sentido siguiente:

$$u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad \forall q < \frac{N}{N-1}, \quad (2.6)$$

$$-\nabla \cdot A\nabla u + \lambda u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (2.7)$$

Obsérvese que, si (2.6) es cierto, entonces $A\nabla u \in L^q(\Omega)^N$ y, por tanto, cada término de (2.7) tiene sentido.

Demostraremos en primer lugar (2.6). Sea

$$E_j = \{x \in \Omega; 2^j \leq |u(x)| < 2^{j+1}\}$$

para cada entero $j \geq 1$. Entonces, de (2.3) se deduce en particular que

$$\int_{E_j} |\nabla u|^2 \leq C_0 2^j \quad \forall j \geq 1 \quad (2.8)$$

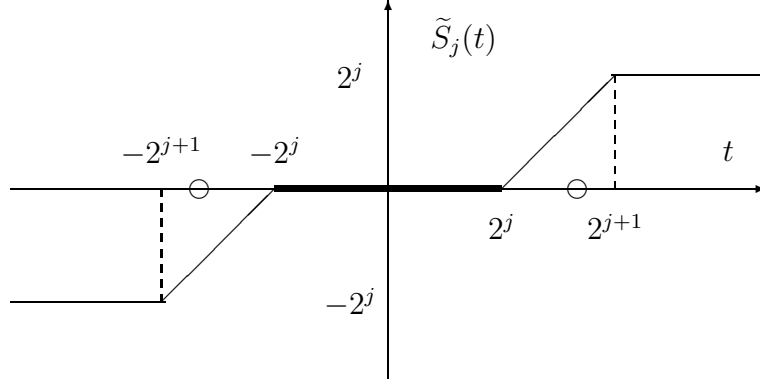
par alguna constante C_0 . Sea q tal que $1 < q < \frac{N}{N-1}$ (por tanto, $q < 2$ y $q < N$).

Utilizando la desigualdad de Hölder con $p = \frac{2}{q} > 1$ y $p' = \frac{p}{p-1}$, obtenemos que

$$\int_{E_j} |\nabla u|^q \leq \left(\int_{E_j} |\nabla u|^{q \cdot \frac{2}{q}} \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{E_j} 1 \right)^{1-\frac{q}{2}} \leq (C_0 2^j)^{\frac{q}{2}} |E_j|^{1-\frac{q}{2}} \quad (2.9)$$

Para evaluar $|E_j|$, definimos $\tilde{S}_j : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ como sigue:

$$\tilde{S}_j(t) = \begin{cases} -2^j & \text{si } t \leq -2^{j+1}, \\ t + 2^j & \text{si } -2^{j+1} \leq t \leq -2^j, \\ 0 & \text{si } -2^j \leq t \leq 2^j, \\ t - 2^j & \text{si } 2^j \leq t \leq 2^{j+1}, \\ 2^j & \text{si } t \geq 2^{j+1}. \end{cases}$$



Aplicando la desigualdad de Sobolev con $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ si $N \geq 3$, y 2^* un número finito fijo (que elegiremos mas adelante tal que $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q} < 0$) si $N = 2$, se deduce de (2.8) que

$$\begin{aligned} C_0 2^j &\geq \int_{E_j} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \tilde{S}_j(u)|^2 \\ &\geq C_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |\tilde{S}_j(u)|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \geq C_{\Omega} \left(\int_{E_{j+1}} 2^{j2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} = C_{\Omega} 2^{2j} |E_{j+1}|^{\frac{2}{2^*}} \end{aligned}$$

de donde

$$|E_j| \leq \left(2 \frac{C_0}{C_{\Omega}} \right)^{\frac{2^*}{2}} 2^{-j \frac{2^*}{2}} \quad \text{si } j \geq 1. \quad (2.10)$$

De (2.9) y (2.10), obtenemos que

$$\int_{E_j} |\nabla u|^q \leq C_0^{\frac{q}{2}} 2^{\frac{jq}{2}} \left(\left(2 \frac{C_0}{C_{\Omega}} \right)^{\frac{2^*}{2}} 2^{-j \frac{2^*}{2}} \right)^{1 - \frac{q}{2}} = C_1 2^{\frac{jq}{2} - j \frac{2^*}{2} (1 - \frac{q}{2})},$$

donde C_1 sólo depende de C_0 , C_{Ω} , y q . Pero

$$\frac{jq}{2} - j \frac{2^*}{2} \left(1 - \frac{q}{2} \right) = jq \frac{2^*}{2} \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2} \right) = -\gamma(q, N)j$$

donde $\gamma(q, N) > 0$ tan sólo depende de q y de N . Por ejemplo, cuando $N \geq 3$ se tiene que $\gamma = \frac{N-1}{N-2} \left(\frac{N}{N-1} - q \right)$. Llegamos por tanto a que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^q = \int_{|u| \leq 2} |\nabla u|^q + \sum_{j \geq 1} \int_{E_j} |\nabla u|^q \leq \int_{|u| \leq 2} |\nabla u|^q + C_1 \sum_{j \geq 1} 2^{-\gamma(q, N)j}$$

Utilizando de nuevo la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\int_{|u| \leq 2} |\nabla u|^q = \int_{\Omega} |\nabla T_2(u)|^q \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla T_2(u)|^2 \right)^{\frac{2}{q}} |\Omega|^{1-\frac{2}{q}}$$

Por otro lado,

$$\sum_{j \geq 1} 2^{-\gamma(q,N)j}$$

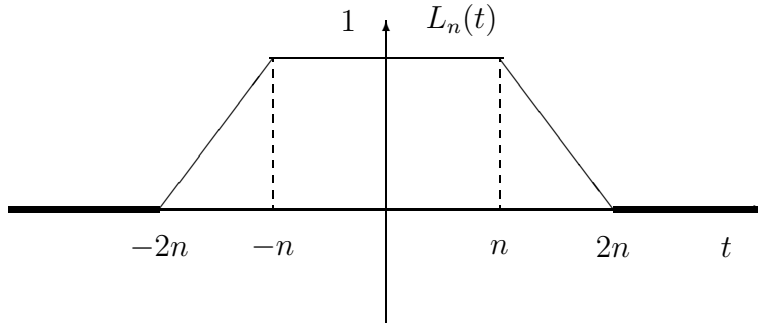
es un número finito que sólo depende de q y de N . En consecuencia, queda probado que para cada $q \in \left(1, \frac{N}{N-1}\right)$ existe una constante C_q , que sólo depende de Ω , N , q , C_0 y $\|T_2(u)\|_{H_0^1}$, tal que

$$\|u\|_{W_0^{1,q}} \leq C_q$$

Esto conduce a (2.6) (y proporciona una estimación de la norma de u en $W_0^{1,q}(\Omega)$).

Probemos a continuación (2.7). Sea $L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función siguiente:

$$L_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -2n, \\ \frac{t}{n} + 2 & \text{si } -2n \leq t \leq -n, \\ 1 & \text{si } -n \leq t \leq n, \\ -\frac{t}{n} + 2 & \text{si } n \leq t \leq 2n, \\ 0 & \text{si } t \geq 2n \end{cases} \quad (2.11)$$



y supongamos que β_n viene dada por:

$$\beta_n(0) = 0, \quad \beta_n'(t) = L_n(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Nótese que $|\beta'_n(u)| \leq 1$ y $\beta'_n(u) \rightarrow 1$ c.p.d. en Ω si $n \rightarrow +\infty$. De acuerdo con el Teorema de Lebesgue, se tiene lo siguiente cuando $n \rightarrow +\infty$:

$$\beta'_n(u)A \cdot \nabla u \rightarrow A \cdot \nabla u \text{ en } L^q(\Omega)^N,$$

$$u\beta'_n(u) \rightarrow u \text{ en } L^1(\Omega),$$

$$f\beta'_n(u) \rightarrow f \text{ en } L^1(\Omega).$$

Por otro lado, como

$$\|\beta''_n(u)\nabla u \cdot A\nabla u\|_{L^1} \leq \|A\|_{L^\infty} \frac{1}{n} \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2,$$

es también cierto que $\beta''_n(u)\nabla u \cdot A\nabla u \rightarrow 0$ en $L^1(\Omega)$ si $n \rightarrow +\infty$. Eligiendo $\beta = \beta_n$ en (2.4) y pasando al límite cuando $n \rightarrow +\infty$ y $\Phi = 0$, se obtiene (2.7).

3 EXISTENCIA DE SOLUCION RENORMALIZADA (PRIMERA PARTE DE LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.1)

A continuación, presentamos una demostración de la existencia de solución renormalizada del problema (1.1). Consta de varias etapas.

Etapas 1: Introducción de las soluciones aproximadas.

Consideramos, para cada $\varepsilon > 0$, el problema aproximado

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u^\varepsilon) - \nabla \cdot \Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)_\varepsilon$$

donde Φ^ε está definida por

$$\Phi^\varepsilon(t) = \Phi(T_{\frac{1}{\lambda\varepsilon}}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y

$$f^\varepsilon = T_{1/\varepsilon}(f).$$

Nótese que $f^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ y que $\Phi^\varepsilon(v) \in L^\infty(\Omega)^N$ cualquiera que sea $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Veamos que (3.1) $_\varepsilon$ posee al menos una solución $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ (al terminar esta etapa, veremos que $u^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ y que $\Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) \equiv \Phi(u^\varepsilon)$). Para ello, utilizaremos un argumento de punto fijo (Teorema de Schauder). Así, introducimos el operador R^ε , definido de $L^2(\Omega)$ en sí mismo como sigue: Para cada $v \in L^2(\Omega)$, se plantea el problema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u) + \lambda u = f^\varepsilon + \nabla \cdot \Phi^\varepsilon(v) & \text{en } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Dado $v \in L^2(\Omega)$, tenemos que $f^\varepsilon + \nabla \cdot \Phi^\varepsilon(v) \in H^{-1}(\Omega)$ y de acuerdo con el Lema de Lax-Milgram, el problema precedente posee una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$, que denotaremos $u = R^\varepsilon(v)$. Obviamente, $R^\varepsilon = R_3 \circ R_2 \circ R_1^\varepsilon$, donde

a) R_1^ε es la aplicación definida por

$$R_1^\varepsilon(v) = f^\varepsilon + \nabla \cdot \Phi^\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Dado que Φ^ε es globalmente Lipschitziana (con constante de Lipschitz igual a la de Φ en $[-1/\lambda\varepsilon, 1/\lambda\varepsilon]$), $v \rightarrow \Phi^\varepsilon(v)$ es una aplicación continua de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)^N$ (de hecho, de $L^2(\Omega)$ en cualquier $L^p(\Omega)^N$ con p finito; cf. la desigualdad (3.13) más abajo). En consecuencia, R_1^ε aplica de forma continua $L^2(\Omega)$ en $H^{-1}(\Omega)$.

b) R_2 está definida como sigue: Para cada $g \in H^{-1}(\Omega)$, $w = R_2(g)$ si y sólo si

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla w) + \lambda w = g & \text{en } \Omega, \\ w \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Es bien sabido que R_2 es un operador lineal continuo bien definido de $H^{-1}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$.

c) R_3 es la inyección (compacta) de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Por tanto, R^ε es una aplicación continua del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ en sí mismo. Además, es claro que R^ε aplica todo $L^2(\Omega)$ en una bola de $L^2(\Omega)$; de hecho, R_1^ε aplica $L^2(\Omega)$ en una bola de $H^{-1}(\Omega)$ gracias a que, para cada $s \in \mathbb{R}$,

$$|\Phi^\varepsilon(s)| \leq \max_{|t| \leq 1/\lambda\varepsilon} |\Phi(t)|. \quad (3.13)$$

Finalmente, R^ε es compacta puesto que $R_2 \circ R_1^\varepsilon(L^2(\Omega))$ está contenido en una bola de $H_0^1(\Omega)$ y R_3 es compacta. Gracias al Teorema de Schauder, existe al menos un punto fijo de R^ε , es decir una solución u^ε de $(3.1)_\varepsilon$.

Para finalizar este apartado, probemos a continuación que cada $u^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ y que

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\lambda} \|f^\varepsilon\|_{L^\infty} \equiv C_\varepsilon \quad (3.14)$$

para cada $\varepsilon > 0$. Esto es consecuencia de la forma débil del Principio del Máximo aplicado a $(3.1)_\varepsilon$. En efecto, veamos (por ejemplo) que

$$u^\varepsilon \leq C_\varepsilon \quad \text{c.p.d. en } \Omega. \quad (3.15)$$

Basta introducir la función

$$v_* = (u^\varepsilon - C_\varepsilon)_+$$

que pertenece a $H_0^1(\Omega)$ y que, utilizada en la formulación débil, conduce a la igualdad

$$\int_{\Omega} A\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v_* + \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot \nabla v_* + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon v_* = \int_{\Omega} f^\varepsilon v_*$$

Claramente,

$$\int_{\Omega} A\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v_* = \int_{\Omega} A\nabla v_* \cdot \nabla v_* \geq \alpha \|v_*\|_{H_0^1}^2$$

y

$$\lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon v_* = \lambda \int_{\Omega} |v_*|^2 + \lambda \int_{\Omega} C_\varepsilon v_* = \lambda \|v_*\|_{L^2}^2 + \|f^\varepsilon\|_{L^\infty}^2 \int_{\Omega} v_*$$

Por otra parte, si ponemos

$$(\Psi_*^\varepsilon)_i(t) = \int_0^t \Phi_i^\varepsilon(s) \mathbf{1}_{\{s > C_\varepsilon\}} ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y

$$\Psi_*^\varepsilon = ((\Psi_*^\varepsilon)_1, (\Psi_*^\varepsilon)_2, \dots, (\Psi_*^\varepsilon)_N),$$

resulta que

$$\Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot \nabla v_* = \mathbf{1}_{\{u^\varepsilon > C_\varepsilon\}} \Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon = (\Psi_*^\varepsilon)'(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon = \nabla \cdot \Psi_*^\varepsilon(u^\varepsilon)$$

(cada uno de los términos escritos pertenece a $L^2(\Omega)$, el cálculo es válido ya que $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ y $\Psi_*^\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})^N$). En consecuencia, gracias al Teorema de la Divergencia,

$$\int_\Omega \Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot \nabla v_* = \int_\Omega \nabla \cdot \Psi_*^\varepsilon(u^\varepsilon) = \int_{\partial\Omega} \Psi_*^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Por tanto,

$$\alpha \|v_*\|_{H_0^1}^2 + \lambda \|v_*\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega (f^\varepsilon - \|f^\varepsilon\|_{L^\infty}) v_* \leq 0$$

y $v_* = 0$ c.p.d., esto es se cumple (3.15).

Como $\|f^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\varepsilon}$, se ha demostrado que

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\lambda\varepsilon}$$

y, puesto que $\Phi^\varepsilon(t) = \Phi(T_{1/\lambda\varepsilon}(t))$, se tiene que $\Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) = \Phi(u^\varepsilon)$. En consecuencia, para cada $\varepsilon > 0$, existe al menos una solución $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u^\varepsilon) - \nabla \cdot \Phi(u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5)_\varepsilon$$

Etapa 2: Estimaciones de las soluciones aproximadas.

Veamos en primer lugar que

$$\|T_K(u^\varepsilon)\|_{H_0^1}^2 + \lambda \|T_K(u^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq K \|f\|_{L^1} \quad (3.17)$$

para cada $\varepsilon > 0$ y cada $K > 0$. Utilizando $T_K(u^\varepsilon)$, que pertenece a $H_0^1(\Omega)$, en la formulación débil de (3.5) $_\varepsilon$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega A\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) + \int_\Omega \Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) + \lambda \int_\Omega u^\varepsilon T_K(u^\varepsilon) \\ &= \int_\Omega f^\varepsilon T_K(u^\varepsilon) \leq \|f^\varepsilon\|_{L^1} \|T_K(u^\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} K \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por otro lado,

$$\int_{\Omega} A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) = \int_{\Omega} A \nabla T_K(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) \geq \alpha \|\nabla T_K(u^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \quad (3.19)$$

y también se tiene que

$$\int_{\Omega} \Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) = 0 \quad (3.20)$$

En efecto, tomando ahora

$$(\Psi_K)_i(t) = \int_0^t \Phi_i(s) T_K'(s) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y

$$\Psi_K = ((\Psi_K)_1, (\Psi_K)_2, \dots, (\Psi_K)_N),$$

obtenemos que

$$\nabla \cdot \Psi_K(u^\varepsilon) = (\Psi_K)'(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon = T_K'(u^\varepsilon) \Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon = \Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon);$$

aplicando de nuevo el Teorema de la Divergencia, resulta que

$$\int_{\Omega} \Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \Psi_K(u^\varepsilon) = \int_{\partial\Omega} \Psi_K(u^\varepsilon) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

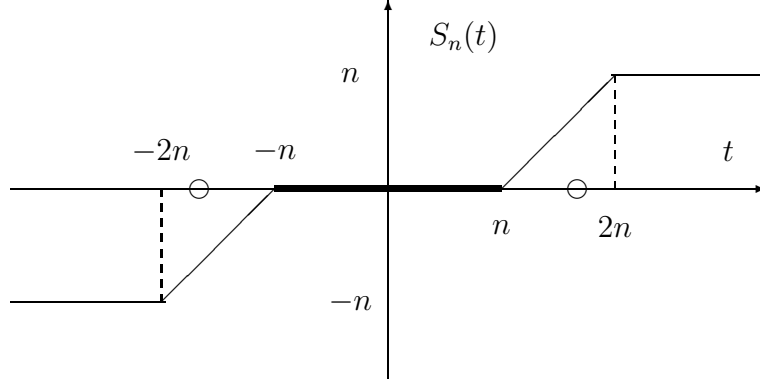
(la igualdad (3.20) es cierta incluso si Ω no es regular porque, como $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, esta función puede ser aproximada por funciones $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$). Observamos además que

$$\int_{\Omega} u^\varepsilon T_K(u^\varepsilon) \geq \int_{\Omega} |T_K(u^\varepsilon)|^2 = \|T_K(u^\varepsilon)\|_{L^2}^2$$

De aquí, recordando (3.18)–(3.20), obtenemos (3.17).

A continuación, intentaremos acotar las cantidades $\frac{1}{n} \int_{n \leq |u^\varepsilon| \leq 2n} |\nabla u^\varepsilon|^2$. Para ello, introducimos las funciones $S_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definidas como sigue:

$$S_n(t) = \begin{cases} -n & \text{si } t \leq -2n, \\ t+n & \text{si } -2n \leq t \leq -n, \\ 0 & \text{si } -n \leq t \leq n, \\ t-n & \text{si } n \leq t \leq 2n, \\ n & \text{si } t \geq 2n. \end{cases} \quad (3.21)$$



Nótese que $S_n(t) = T_{2n}(t) - T_n(t)$. Cada S_n es Lipschitziana y $S_n(0) = 0$. Si $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces $S_n(v) \in H_0^1(\Omega)$. Además, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $n \geq 1$, se puede utilizar $S_n(u^\varepsilon)$ como función “test” en la formulación variacional de (3.5) $_\varepsilon$; se obtiene que

$$\int_{\Omega} A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla S_n(u^\varepsilon) + \int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot \nabla S_n(u^\varepsilon) + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon S_n(u^\varepsilon) = \int_{\Omega} f^\varepsilon S_n(u^\varepsilon). \quad (3.22)$$

Obsérvese que $\nabla S_n(u^\varepsilon) = S'_n(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon$ y

$$S'_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n < |s| < 2n, \\ 0 & \text{si } |s| < n \text{ ó } |s| > 2n. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla S_n(u^\varepsilon) &= \int_{\Omega} S'_n(u^\varepsilon) A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} S'_n(u^\varepsilon) |\nabla u^\varepsilon|^2 = \alpha \int_{n \leq |u^\varepsilon| \leq 2n} |\nabla u^\varepsilon|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, procediendo como en la demostración de (3.20), es decir escribiendo el integrando $\Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot \nabla S_n(u^\varepsilon)$ como la divergencia de una cierta función $\bar{\Psi}_n^\varepsilon(u^\varepsilon)$, llegamos a que

$$\int_{\Omega} \Phi^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot \nabla S_n(u^\varepsilon) = 0.$$

También está claro que

$$\int_{\Omega} u^\varepsilon S_n(u^\varepsilon) \geq 0.$$

Luego, a partir de (3.22), obtenemos que

$$\alpha \int_{n \leq |u^\varepsilon| \leq 2n} |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq \int_{\Omega} f^\varepsilon S_n(u^\varepsilon) \leq n \int_{|u^\varepsilon| \geq n} |f^\varepsilon| \leq n \int_{|u^\varepsilon| \geq n} |f|,$$

es decir

$$\frac{1}{n} \int_{n \leq |u^\varepsilon| \leq 2n} |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \int_{|u^\varepsilon| \geq n} |f|. \quad (3.23)$$

Etapla 3: $\{u^\varepsilon\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\Omega)$.

Sean u^ε y u^η soluciones de los correspondientes problemas aproximados (3.5) $_\varepsilon$ y (3.5) $_\eta$. Entonces

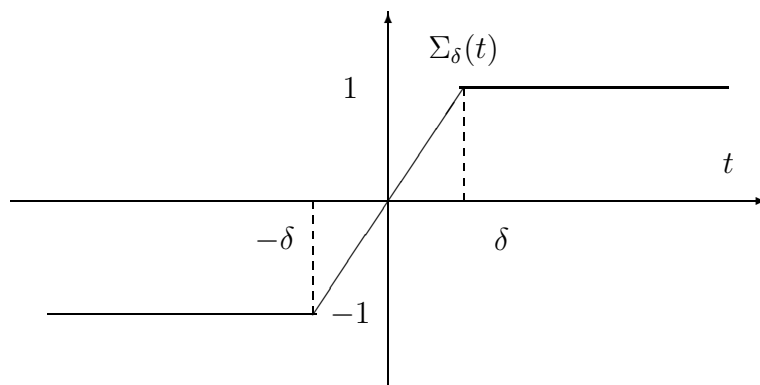
$$-\nabla \cdot (A \nabla (u^\varepsilon - u^\eta)) - \nabla \cdot (\Phi(u^\varepsilon) - \Phi(u^\eta)) + \lambda(u^\varepsilon - u^\eta) = f^\varepsilon - f^\eta \quad (3.24)$$

en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Introduzcamos la función $\Sigma_\delta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida como sigue:

$$\Sigma_\delta(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } s \leq -\delta, \\ \frac{1}{\delta}t & \text{si } -\delta \leq t \leq \delta, \\ 1 & \text{si } t \geq \delta. \end{cases} \quad (3.25)$$

Obviamente,

$$\Sigma_\delta(t) = \frac{1}{\delta} T_\delta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



De nuevo, Σ_δ es Lipschitziana y $\Sigma_\delta(0) = 0$; ahora tenemos que $\Sigma'_\delta = \frac{1}{\delta} \mathbf{1}_{[-\delta, \delta]}$. Además, puesto que $u^\varepsilon - u^\eta \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que $\Sigma_\delta(u^\varepsilon - u^\eta) \in H_0^1(\Omega)$ y

$$\nabla \Sigma_\delta(u^\varepsilon - u^\eta) = \Sigma'_\delta(u^\varepsilon - u^\eta) \nabla (u^\varepsilon - u^\eta).$$

Gracias a (3.24),

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \Sigma'_{\delta}(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) A \nabla(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \cdot \nabla(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \\ + \int_{\Omega} \Sigma'_{\delta}(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) (\Phi(u^{\varepsilon}) - \Phi(u^{\eta})) \cdot \nabla(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \\ + \lambda \int_{\Omega} (u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \Sigma_{\delta}(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) = \int_{\Omega} (f^{\varepsilon} - f^{\eta}) \Sigma_{\delta}(u^{\varepsilon} - u^{\eta}). \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Estudiemos el comportamiento de cada uno de estos términos. El primero de ellos es evidentemente no negativo. El segundo coincide con

$$\frac{1}{\delta} \int_{|u^{\varepsilon} - u^{\eta}| \leq \delta} (\Phi(u^{\varepsilon}) - \Phi(u^{\eta})) \cdot \nabla(u^{\varepsilon} - u^{\eta}).$$

Como Φ es localmente Lipschitziana, para

$$M(\varepsilon, \eta) = \text{Máx} \{ \|u^{\varepsilon}\|_{L^{\infty}}, \|u^{\eta}\|_{L^{\infty}} \},$$

podemos afirmar que

$$|\Phi(u^{\varepsilon}) - \Phi(u^{\eta})| \leq k(\varepsilon, \eta) |u^{\varepsilon} - u^{\eta}| \text{ c.p.d. en } \Omega$$

para alguna constante $k(\varepsilon, \eta)$ que sólo depende de $M(\varepsilon, \eta)$. Luego

$$\left| \int_{\Omega} \Sigma'_{\delta}(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) (\Phi(u^{\varepsilon}) - \Phi(u^{\eta})) \cdot \nabla(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \right| \leq k(\varepsilon, \eta) \int_{|u^{\varepsilon} - u^{\eta}| \leq \delta} |\nabla(u^{\varepsilon} - u^{\eta})|.$$

Dado que, cuando $v \in H^1(\Omega)$, $\nabla v = 0$ c.p.d. en $\{x \mid v(x) = 0\}$, deducimos que para ε y η fijos esta última integral tiende a 0 cuando $\delta \rightarrow 0$. En consecuencia,

$$\int_{\Omega} \Sigma'_{\delta}(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) (\Phi(u^{\varepsilon}) - \Phi(u^{\eta})) \cdot \nabla(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0. \quad (3.27)$$

Por otra parte, es suficiente aplicar el Teorema de Lebesgue ($|\Sigma_{\delta}(t)| \leq 1, \forall t$) para demostrar que

$$\lambda \int_{\Omega} (u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \Sigma_{\delta}(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \rightarrow \lambda \|u^{\varepsilon} - u^{\eta}\|_{L^1} \text{ cuando } \delta \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Por último, obsérvese que

$$\int_{\Omega} (f^{\varepsilon} - f^{\eta}) \Sigma_{\delta}(u^{\varepsilon} - u^{\eta}) \leq \int_{\Omega} |f^{\varepsilon} - f^{\eta}| = \|f^{\varepsilon} - f^{\eta}\|_{L^1} \quad (3.29)$$

A partir de (3.26), (3.27), (3.28) y (3.29), obtenemos que

$$\lambda \|u^{\varepsilon} - u^{\eta}\|_{L^1} \leq \|f^{\varepsilon} - f^{\eta}\|_{L^1} \quad (3.30)$$

y esto cualesquiera que sean ε y η . Si $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$, entonces $\|f^\varepsilon - f^\eta\|_{L^1} \rightarrow 0$; luego $\{u^\varepsilon\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\Omega)$.

Nota 3.1 Obviamente, (3.30) demuestra que, cuando $f \in L^\infty(\Omega)$, hay unicidad de solución débil ($u \in H_0^1(\Omega)$ y la ecuación entendida en el sentido de las distribuciones) de (1.1).

Etapas 4: Extracción de una subsucesión convergente.

Existe una función $u \in L^1(\Omega)$ tal que

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ en } L^1(\Omega).$$

Extrayendo una subsucesión (si hiciera falta y, en tal caso, la subsucesión sería superindicada de nuevo con ε), podemos afirmar que $u^\varepsilon \rightarrow u$ c.p.d. en Ω . Además, como $v \mapsto T_K(v)$ es continua de $L^1(\Omega)$ (fuerte) en $L^p(\Omega)$ (fuerte) para cada p finito y $\|T_K(u^\varepsilon)\|_{H_0^1}^2 \leq K\|f\|_{L^1}$ (cf. (3.17)), es claro que la sucesión verifica

$$T_K(u^\varepsilon) \rightharpoonup T_K(u) \text{ en } H_0^1(\Omega)\text{-débil } \forall K > 0.$$

Etapas 5: El límite u cumple (2.3).

Sabemos que $u \in L^1(\Omega)$ y que $T_K(u) \in H_0^1(\Omega) \forall K > 0$. Veamos a continuación que

$$\frac{1}{n} \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Para ello recurriremos a (3.23). Obsérvese que podemos escribir que

$$\int_{\Omega} |\nabla S_n(u^\varepsilon)|^2 = \int_{n \leq |u^\varepsilon| \leq 2n} |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq \frac{n}{\alpha} \int_{|u^\varepsilon| \geq n} |f| = \frac{n}{\alpha} \int_{\Omega} |f| \mathbf{1}_{\{|u^\varepsilon| \geq n\}} \quad (3.31)$$

Pero

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{1}_{\{|u^\varepsilon| \geq n\}} \leq \mathbf{1}_{\{|u| \geq n\}} \quad \text{y} \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |f| \mathbf{1}_{\{|u^\varepsilon| \geq n\}} \leq \int_{\Omega} |f| \mathbf{1}_{\{|u| \geq n\}}$$

c.p.d. en Ω . Luego, gracias al Lema de Fatou,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|u^\varepsilon| \geq n} |f| \leq \int_{|u| \geq n} |f| \quad (3.32)$$

Por otra parte, está claro que

$$S_n(u^\varepsilon) \rightharpoonup S_n(u) \text{ en } H_0^1(\Omega)\text{-débil.}$$

De (3.31) y de la semicontinuidad inferior de la norma, se obtiene por tanto que

$$\begin{aligned} \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla S_n(u)|^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla S_n(u^\varepsilon)|^2 \\ &\leq \frac{n}{\alpha} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|u^\varepsilon| \geq n} |f| \leq \frac{n}{\alpha} \int_{|u| \geq n} |f|, \end{aligned} \quad (3.33)$$

de donde resulta lo que queríamos demostrar ya que $\int_{|u| \geq n} |f| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Etapa 6: Paso al límite en $(3.5)_\varepsilon$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Multiplicaremos puntualmente por $\beta'(u^\varepsilon)$, siendo $\beta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ una función arbitraria tal que $\text{Sop}(\beta') \subset [-K, K]$, para un cierto K . Teniendo en cuenta que $\beta'(u^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, se obtiene

$$\begin{cases} -\nabla \cdot [\beta'(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon] + \beta''(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon - \nabla \cdot [\beta'(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon)] \\ + \beta''(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon + \lambda u^\varepsilon \beta'(u^\varepsilon) = f^\varepsilon \beta'(u^\varepsilon) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \quad (3.34)$$

(es lícito escribir esta igualdad ya que cada término tiene sentido al menos como distribución; recuérdese que $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$). Según sabemos,

$$\begin{aligned} f^\varepsilon &\rightarrow f && \text{en } L^1(\Omega) \text{ y c.p.d.}, \\ u^\varepsilon &\rightarrow u && \text{en } L^1(\Omega) \text{ y c.p.d.}, \\ \beta'(u^\varepsilon) &\rightarrow \beta'(u) && \text{c.p.d., con } |\beta'(u^\varepsilon)| \leq \|\beta'\|_{L^\infty} \text{ c.p.d.}, \\ T_K(u^\varepsilon) &\rightarrow T_K(u) && \text{en } H_0^1(\Omega) \text{ débil y c.p.d., con } |T_K(u^\varepsilon)| \leq K \text{ c.p.d.} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Intentaremos a continuación pasar al límite en cada uno de los términos de (3.34).

A) El término $f^\varepsilon \beta'(u^\varepsilon)$:

Gracias al Teorema de Lebesgue,

$$f^\varepsilon \beta'(u^\varepsilon) \rightarrow f \beta'(u) \quad \text{en } L^1(\Omega). \quad (3.36)$$

B) El término $\lambda u^\varepsilon \beta'(u^\varepsilon)$:

Análogamente, dado que

$$u^\varepsilon \beta'(u^\varepsilon) = T_K(u^\varepsilon) \beta'(T_K(u^\varepsilon)), \quad u \beta'(u) = T_K(u) \beta'(T_K(u)),$$

por el Teorema de Lebesgue resulta que

$$\lambda u^\varepsilon \beta'(u^\varepsilon) \rightarrow \lambda u \beta'(u) \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \forall p \in [1, +\infty). \quad (3.37)$$

C) El término $\beta''(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon$:

Tenemos que

$$\beta''(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon = \Phi(T_K(u^\varepsilon)) \cdot \nabla \beta'(T_K(u^\varepsilon)),$$

y

$$\beta''(u)\Phi(u) \cdot \nabla u = \Phi(T_K(u)) \cdot \nabla \beta'(T_K(u)).$$

Observemos que $\nabla \beta'(T_K(u^\varepsilon)) \rightharpoonup \nabla \beta'(T_K(u))$ en $L^2(\Omega)^N$ -débil. Esto es consecuencia de que $\beta'(T_K(u^\varepsilon))$ está uniformemente acotada en $H^1(\Omega)$ y de que converge c.p.d.

hacia $\beta'(T_K(u))$. Por otra parte, $\Phi(T_K(u^\varepsilon)) \rightarrow \Phi(T_K(u))$ en $L^p(\Omega)$ para cada p finito (de nuevo como consecuencia del Teorema de Lebesgue). Se deduce que

$$\beta''(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \beta''(u)\Phi(u) \cdot \nabla u \quad \text{en } L^q(\Omega)\text{-d\u00e9bil} \quad \forall q \in [1, 2). \quad (3.38)$$

D) El t\u00e9rmino $\nabla \cdot (\beta'(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon))$:

Sabemos que

$$\beta'(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon) = \beta'(T_K(u^\varepsilon))\Phi(T_K(u^\varepsilon)), \quad \beta'(u)\Phi(u) = \beta'(T_K(u))\Phi(T_K(u)).$$

Tambi\u00e9n por el Teorema de Lebesgue,

$$\beta'(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon) \rightarrow \beta'(u)\Phi(u) \quad \text{en } L^p(\Omega)^N \quad \forall p \in [1, +\infty),$$

de donde

$$\nabla \cdot (\beta'(u^\varepsilon)\Phi(u^\varepsilon)) \rightarrow \nabla \cdot (\beta'(u)\Phi(u)) \quad \text{en } W^{-1,p}(\Omega) \quad \forall p \in [1, +\infty). \quad (3.39)$$

E) El t\u00e9rmino $\nabla \cdot (\beta'(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon)$:

Dado que

$$\beta'(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon = \beta'(T_K(u^\varepsilon))A\nabla T_K(u^\varepsilon), \quad \beta'(u)A\nabla u = \beta'(T_K(u))A\nabla T_K(u),$$

$$\nabla T_K(u^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla T_K(u) \quad \text{en } L^2(\Omega)^N\text{-d\u00e9bil}$$

y

$$\beta'(T_K(u^\varepsilon)) \rightarrow \beta'(T_K(u)) \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \forall p \in [1, +\infty),$$

resulta que

$$\beta'(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \beta'(u)A\nabla u \quad \text{en } L^q(\Omega)^N\text{-d\u00e9bil} \quad \forall q \in [1, 2),$$

de donde tambi\u00e9n se tiene que

$$\nabla \cdot (\beta'(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla \cdot (\beta'(u)A\nabla u) \quad \text{en } W^{-1,q}(\Omega)\text{-d\u00e9bil} \quad \forall q \in [1, 2).$$

Etapa 7: Paso al l\u00edmite en el t\u00e9rmino $\beta''(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon$ y conclusi\u00f3n.

Supongamos por el momento que $\nabla T_K(u^\varepsilon) \rightarrow \nabla T_K(u)$ en $L^2(\Omega)^N$ (fuertemente), es decir que hay convergencia fuerte en $H_0^1(\Omega)$ para $T_K(u^\varepsilon)$. Esto ser\u00e1 probado en la secci\u00f3n 4. En tal caso, gracias a las igualdades

$$\beta''(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = A\nabla T_K(u^\varepsilon) \cdot \nabla \beta'(T_K(u^\varepsilon)),$$

$$\beta''(u)A\nabla u \cdot \nabla u = A\nabla T_K(u) \cdot \nabla \beta'(T_K(u)),$$

tendremos que

$$\beta''(u^\varepsilon)A\nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightarrow \beta''(u)A\nabla u \cdot \nabla u \quad \text{en } L^1(\Omega). \quad (3.40)$$

Usando (3.36)–(3.40), obtenemos

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\beta'(T_K(u))A\nabla T_K(u)) + \beta''(T_K(u))\nabla T_K(u) \cdot A\nabla T_K(u) \\ -\nabla \cdot (\beta'(T_K(u))\Phi(T_K(u))) + \beta''(T_K(u))\nabla T_K(u) \cdot \Phi(T_K(u)) \\ \quad + \lambda T_K(u)\beta'(T_K(u)) \end{cases} = f\beta'(T_K(u))$$

en el sentido de las distribuciones sobre Ω . Esto prueba que u es solución renormalizada de (1.1). Con ello termina la demostración de la existencia de solución renormalizada.

4 CONVERGENCIA FUERTE EN $H_0^1(\Omega)$ DE LAS “TRUNCADAS” $T_K(u^\varepsilon)$

En esta sección, vamos a demostrar el siguiente resultado de convergencia:

Teorema 4.1 *Si u^ε es solución de $(3.5)_\varepsilon$ entonces, para cada $K > 0$, se tiene que*

$$T_K(u^\varepsilon) \rightarrow T_K(u) \text{ en } H_0^1(\Omega) \quad (4.41)$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nota 4.1 Con un argumento similar al que sigue, puede probarse que si cada $f^\varepsilon \in L^1(\Omega)$, cada u^ε es solución renormalizada de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u^\varepsilon) - \nabla \cdot \Phi(u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.42)$$

(en el sentido de la Definición 2.1 con f cambiada por f^ε) y, además,

$$f^\varepsilon \rightarrow f \text{ en } L^1(\Omega), \quad (4.43)$$

entonces de nuevo se tiene (4.41), donde u es una solución renormalizada del problema (1.1). Dicho de otra forma, hay continuidad de la solución renormalizada respecto al segundo miembro.

Nota 4.2 Por supuesto, en la demostración de (4.41), no usaremos que u es solución renormalizada de (1.1). De este modo, no hay falta de lógica en la demostración de existencia.

La demostración del Teorema 4.1 ha sido dividida en varias etapas. Durante la misma, consideraremos un $K > 0$ fijo. De acuerdo con lo que ya sabemos, los resultados de la sección 3 que preceden a la etapa 7 de la demostración del Teorema 1.1 son válidos.

Etapas 1. Recordemos que (cf. (3.18))

$$\int_{\Omega} A\nabla u^\varepsilon \nabla T_K(u^\varepsilon) + \int_{\Omega} \Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon T_K(u^\varepsilon) = \int_{\Omega} f^\varepsilon T_K(u^\varepsilon).$$

Estudiaremos el comportamiento de cada término cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. En relación con el segundo término, recordemos que en (3.20) hemos probado que

$$\int_{\Omega} \Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) = 0.$$

Como $u^\varepsilon T_K(u^\varepsilon)$ converge fuertemente en $L^1(\Omega)$ hacia $u T_K(u)$, el tercer sumando tiende a $\lambda \int_{\Omega} u T_K(u)$. Análogamente, dado que $f^\varepsilon T_K(u^\varepsilon)$ converge fuertemente en $L^1(\Omega)$ hacia $f T_K(u)$, el segundo miembro tiende a $\int_{\Omega} f T_K(u)$. Escribiendo el primer término como $\int_{\Omega} A \nabla T_K(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon)$, hemos obtenido:

$$\int_{\Omega} A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) \rightarrow \int_{\Omega} f T_K(u) - \lambda \int_{\Omega} u T_K(u). \quad (4.44)$$

Etapas 2. Sea $w_n^\varepsilon = T_K(u) L_n(u^\varepsilon)$, donde L_n es la función dada por (2.11). Evidentemente, $w_n^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$. Además, $w_n^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ ya que

$$\nabla w_n^\varepsilon = L_n(u^\varepsilon) \nabla T_K(u) + T_K(u) L_n'(u^\varepsilon) \nabla u^\varepsilon \in L^2(\Omega)^N$$

y $w_n^\varepsilon = 0$ sobre $\partial\Omega$ ($L_n(u^\varepsilon) = 1$ sobre $\partial\Omega$ pero $T_K(u) = 0$ sobre $\partial\Omega$). Por tanto, podemos utilizar, w_n^ε como función “test” en la formulación variacional de $(3.5)_\varepsilon$, lo cual conduce a las igualdades

$$\int_{\Omega} A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla w_n^\varepsilon + \int_{\Omega} \Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla w_n^\varepsilon + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon w_n^\varepsilon = \int_{\Omega} f^\varepsilon w_n^\varepsilon \quad (4.45)$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u^\varepsilon) + \int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla L_n(u^\varepsilon)) T_K(u) \\ + \int_{\Omega} (\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u^\varepsilon) + \int_{\Omega} (\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla L_n(u^\varepsilon)) T_K(u) \\ + \lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon w_n^\varepsilon = \int_{\Omega} f^\varepsilon w_n^\varepsilon \end{array} \right. \quad (4.46)$$

A continuación, analizaremos el comportamiento de cada término cuando, en primer lugar, se hace tender ε a 0 con n fijo y, después, se hace crecer n hacia ∞ .

A) Comportamiento del término $\int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u^\varepsilon)$

Debido a la definición de L_n , se tiene que

$$\int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u^\varepsilon) = \int_{\Omega} (A \nabla T_{2n}(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u)) L_n(T_{2n}(u^\varepsilon)).$$

Ahora bien, por el Teorema de Lebesgue,

$$L_n(T_{2n}(u^\varepsilon)) \nabla T_K(u) \rightarrow L_n(T_{2n}(u)) \nabla T_K(u) \text{ en } L^2(\Omega)^N,$$

mientras que

$$\nabla T_{2n}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla T_{2n}(u) \quad \text{en } L^2(\Omega)^N\text{-débil.}$$

Luego las integrales precedentes convergen cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ hacia

$$\int_{\Omega} (A \nabla T_{2n}(u) \cdot \nabla T_K(u)) L_n(T_{2n}(u))$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para $n \geq K$, esta integral coincide con $\int_{\Omega} A \nabla T_K(u) \cdot \nabla T_K(u)$. Es decir, hemos demostrado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u^\varepsilon) = \int_{\Omega} A \nabla T_K(u) \cdot \nabla T_K(u). \quad (4.47)$$

B) Comportamiento del término $\int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla L_n(u^\varepsilon)) T_K(u)$.

Se tiene

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla L_n(u^\varepsilon)) T_K(u) \right| = \left| \int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon) L'_n(u^\varepsilon) T_K(u) \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \int_{n \leq |u^\varepsilon| \leq 2n} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon) |T_K(u)| \leq \frac{\|A\|_{L^\infty} K}{n} \int_{n \leq |u^\varepsilon| \leq 2n} |\nabla u^\varepsilon|^2. \end{aligned}$$

Pero (3.23) nos dice que

$$\frac{1}{n} \int_{n \leq |u^\varepsilon| \leq 2n} |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \int_{|u^\varepsilon| \geq n} |f|, \quad (4.48)$$

y (3.32) implica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|u^\varepsilon| \geq n} |f| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|u| \geq n} |f| = 0.$$

Luego

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} (A \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla L_n(u^\varepsilon)) T_K(u) \right| = 0 \quad (4.49)$$

C) Comportamiento del término $\int_{\Omega} (\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u^\varepsilon)$.

Obsérvese ahora que

$$(\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u^\varepsilon) = (\Phi(T_{2n}(u^\varepsilon)) \cdot \nabla T_K(u)) L_n(T_{2n}(u^\varepsilon))$$

y, por el Teorema de Lebesgue,

$$L_n(T_{2n}(u^\varepsilon)) \Phi(T_{2n}(u^\varepsilon)) \rightarrow L_n(T_{2n}(u)) \Phi(T_{2n}(u)) \text{ en } L^2(\Omega)^N.$$

En particular, para cada n , resulta que

$$\int_{\Omega} (\Phi(T_{2n}(u^\varepsilon)) \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u^\varepsilon) \rightarrow \int_{\Omega} (\Phi(T_{2n}(u)) \cdot \nabla T_K(u)) L_n(u).$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ahora bien, si $n \geq K$, esta última integral vale lo mismo que

$$\int_{\Omega} \Phi(T_K(u)) \cdot \nabla T_K(u),$$

que es 0. En efecto, si ponemos

$$(\Psi_K)_i(t) = \int_0^t \Phi_i(s) T_K'(s) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y

$$\Psi_K = ((\Psi_K)_1, (\Psi_K)_2, \dots, (\Psi_K)_N),$$

entonces

$$\nabla \cdot \Psi_K(T_K(u)) = \Psi_K'(T_K(u)) \cdot \nabla T_K(u) = \Phi(T_K(u)) \cdot \nabla T_K(u);$$

por el Teorema de la Divergencia, llegamos a que

$$\int_{\Omega} \Phi(T_K(u)) \cdot \nabla T_K(u) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \Psi_K(T_K(u)) = \int_{\partial\Omega} \Psi_K(T_K(u)) \mathbf{n} = 0$$

(estos cálculos son lícitos, puesto que $T_K(u) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; cálculos análogos fueron realizados en la segunda etapa de la sección 3). Hemos probados por tanto que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(u^\varepsilon) \nabla T_K(u) L_n(u^\varepsilon) = 0 \quad \text{si } n \geq K$$

D) Comportamiento del término $\int_{\Omega} (\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla L_n(u^\varepsilon)) T_K(u)$

Se tiene

$$\int_{\Omega} (\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla L_n(u^\varepsilon)) T_K(u) = \int_{\Omega} (\Phi(T_{2n}(u^\varepsilon)) \cdot \nabla L_n(T_{2n}(u^\varepsilon))) T_K(u)$$

Es fácil comprobar que $\nabla L_n(T_{2n}(u^\varepsilon))$ converge en $L^2(\Omega)^N$ -débil hacia $\nabla L_n(T_{2n}(u))$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, para cada n ($L_n(T_{2n}(u^\varepsilon))$ está uniformemente acotada en $H^1(\Omega)$ y converge c.p.d. hacia $L_n(T_{2n}(u))$). Teniendo en cuenta que

$$\Phi(T_{2n}(u^\varepsilon)) \rightarrow \Phi(T_{2n}(u)) \text{ en } L^2(\Omega)^N,$$

resulta que

$$\int_{\Omega} (\Phi(T_{2n}(u^\varepsilon)) \cdot \nabla L_n(T_{2n}(u^\varepsilon))) T_K(u) \rightarrow \int_{\Omega} (\Phi(T_{2n}(u)) \cdot \nabla L_n(T_{2n}(u))) T_K(u)$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Pero esta última integral es de nuevo 0 si $2n \geq K$, ya que se puede escribir que $T_K(u) = T_K(T_{2n}(u))$ y

$$(\Phi(T_{2n}(u)) \cdot \nabla L_n(T_{2n}(u))) T_K(u) = \nabla \cdot \hat{\Psi}_{n,K}(T_{2n}(u)),$$

donde

$$\left(\widehat{\Psi}_{n,K}(t)\right)_i = \int_0^t \Phi(s) L'_n(s) T_K(s) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De lo anterior deducimos que,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\Phi(u^\varepsilon) \cdot \nabla L_n(u^\varepsilon)) T_K(u) = 0 \quad \text{para } n \geq K/2. \quad (4.50)$$

E) Comportamiento de los términos $\lambda \int_{\Omega} u^\varepsilon w_n^\varepsilon$ y $\int_{\Omega} f^\varepsilon w_n^\varepsilon$.

Es fácil probar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon w_n^\varepsilon = \int_{\Omega} u T_K(u) \quad (4.51)$$

y que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f^\varepsilon w_n^\varepsilon = \int_{\Omega} f T_K(u). \quad (4.52)$$

En efecto, para cada n fijo $|u^\varepsilon L_n(u^\varepsilon) T_K(u)| \leq 2nK$ y por el teorema de Lebesgue

$$u^\varepsilon L_n(u^\varepsilon) T_K(u) \rightarrow u L_n(u) T_K(u) \text{ en } L^1(\Omega)$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Teniendo en cuenta cuál es comportamiento de cada término de (4.46), concluimos que

$$\int_{\Omega} A \nabla T_K(u) \nabla T_K(u) + \lambda \int_{\Omega} u T_K(u) = \int_{\Omega} f T_K(u).$$

Esta igualdad, junto con (4.44), lleva a lo siguiente:

$$\int_{\Omega} A \nabla T_K(u^\varepsilon) \cdot \nabla T_K(u^\varepsilon) \rightarrow \int_{\Omega} A \nabla T_K(u) \cdot \nabla T_K(u).$$

Dado que

$$(\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{2} (A + A^t) \vec{v} \cdot \vec{w}$$

es un producto escalar en $L^2(\Omega)^N$ equivalente al producto habitual, la convergencia que precede deja probada la convergencia fuerte de $\nabla T_K(u^\varepsilon)$ en $L^2(\Omega)^N$ y el Teorema 4.1 queda demostrado.

5 DEMOSTRACION DE LA UNICIDAD DE SOLUCION RENORMALIZADA (SEGUNDA PARTE DE LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.1)

Comenzaremos esta sección dando una nueva definición de solución renormalizada:

Definición 5.1 *u se dice solución renormalizada de (1.1) si:*

$$\begin{aligned} u &\in L^1(\Omega), \\ T_K(u) &\in H_0^1(\Omega) \quad \forall K > 0, \\ \frac{1}{n} \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2 &\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.53)$$

y verifica

$$\int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla w + \int_{\Omega} \Phi(u) \cdot \nabla w + \lambda \int_{\Omega} uw = \int_{\Omega} fw \quad (5.54)$$

para cualquier $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que para un cierto K (dependiente de w) sea $\nabla w = 0$ c.p.d. en $\{x; |u(x)| \geq K\}$.

Teorema 5.1 *Las Definiciones 2.1 y 4.1 son equivalentes.*

Nota 5.1 Este resultado justifica que se haya empleado la misma terminología (solución renormalizada) en las dos definiciones.

Nota 5.2 Cada término de (5.54) tiene sentido. En efecto, el primero (teniendo en cuenta las propiedades de w) puede ser escrito como sigue:

$$A \nabla u \cdot \nabla w = A \nabla T_K(u) \cdot \nabla w.$$

Como $\nabla T_K(u)$ y ∇w están en $L^2(\Omega)$, se tiene que $A \nabla T_K(u) \cdot \nabla w \in L^1(\Omega)$. Por la misma razón, el segundo coincide con

$$\Phi(T_K(u)) \cdot \nabla w \in L^2(\Omega)$$

puesto que $\Phi(T_K(u)) \in L^\infty(\Omega)^N$. En tercer lugar, $w \in L^\infty(\Omega)$ y $u \in L^1(\Omega)$; por tanto, $uw \in L^1(\Omega)$. Del mismo modo, $fw \in L^1(\Omega)$.

Nota 5.3 Siempre es posible encontrar funciones w como las que aparecen en la Definición 5.1. En efecto, basta tomar $w = h(u)\varphi$ donde $\varphi \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ tiene soporte contenido en $[-K, K]$.

Demostración del Teorema 5.1:

Primera Etapa:

Veamos que si u es solución renormalizada en el sentido de la Definición 2.1, entonces lo es en el sentido de la Definición 5.1. En efecto, puesto que cada término de (2.4) pertenece a $H^{-1}(\Omega)$, podemos utilizar en la formulación variacional correspondiente como función “test” una función $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ arbitraria:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla w) \beta'(u) + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot A\nabla u) \beta''(u)w + \int_{\Omega} \beta'(u) (\Phi(u) \cdot \nabla w) \\ + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \Phi(u)) \beta''(u)w + \int_{\Omega} \lambda u \beta'(u)w = \int_{\Omega} f \beta'(u)w. \end{cases} \quad (5.55)$$

Supongamos además que $\nabla w = 0$ c.p.d. en $\{x; |u(x)| \geq K\}$. Tomemos $\beta' \equiv L_n$ (dada por (2.11); esta elección es lícita) y analicemos el comportamiento de cada término de la igualdad (5.55) cuando $n \rightarrow \infty$. La primera integral se convierte en

$$\int_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla w) L_n(u) = \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla w,$$

siempre que $n \geq K$. La segunda integral puede acotarse como sigue:

$$\left| \int_{\Omega} (\nabla u \cdot A\nabla u) L'_n(u)w \right| \leq \|A\|_{L^\infty} \|w\|_{L^\infty} \frac{1}{n} \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2.$$

Este último término tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. La tercera integral se escribe

$$\int_{\Omega} L_n(u) (\Phi(u) \cdot \nabla w) = \int_{\Omega} \Phi(u) \cdot \nabla w$$

para $n \geq K$. La cuarta integral se anula. En efecto, teniendo en cuenta que $\nabla w = 0$ c.p.d. en $\{x; |u(x)| \geq K\}$, tomando $n \geq K$ e introduciendo

$$(\Psi_n)_i(s) = \int_0^s \Phi_i(\sigma) L'_n(\sigma) d\sigma \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

y

$$\Psi_n = ((\Psi_n)_1, (\Psi_n)_2, \dots, (\Psi_n)_N),$$

tenemos que $\Psi_n(t) = 0$ si $|t| \leq n$ y, además,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \Phi(u)) L'_n(u)w &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \Psi_n(u)) w \\ &= - \int_{\Omega} \Psi_n(u) \cdot \nabla w = 0 \quad \text{para } n \geq K. \end{aligned}$$

La quinta y la sexta integral de (5.55) convergen hacia la cuarta y la quinta de (5.54) respectivamente cuando $n \rightarrow +\infty$. Así pues, cuando $n \rightarrow +\infty$, se obtiene (5.54) y

u es solución renormalizada en el sentido de la Definición 5.54.

Segunda Etapa:

Recíprocamente, sea u una solución renormalizada en el sentido de la Definición 5.54. Sea $w = \beta'(u)\varphi$ donde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\beta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ y β' posee soporte compacto. Entonces $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y

$$\nabla w = \beta''(u)\varphi\nabla u + \beta'(u)\nabla\varphi.$$

Por tanto, si $\text{Sop}(\beta') \subset [-K, K]$, tenemos que $\nabla w = 0$ c.p.d. en $\{x; |u(x)| \geq K\}$. Utilizando w en (5.54), obtenemos fácilmente que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla\varphi) \beta'(u) + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot A\nabla u) \beta''(u)\varphi \\ + \int_{\Omega} \beta'(u) (\Phi(u) \cdot \nabla\varphi) + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \Phi(u)) \beta''(u)\varphi \\ + \int_{\Omega} \lambda u \beta'(u)\varphi = \int_{\Omega} f \beta'(u)\varphi. \end{cases}$$

Como $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es arbitraria, resulta (2.4) y u es solución renormalizada en el sentido de la Definición 2.1.

Nota 5.4 De hecho, en la definición (5.1), no es necesario suponer

$$\frac{1}{n} \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Esto resulta de hecho de (5.54) sin más que tomar $w = S_n(u)$, donde S_n es la función definida en (3.21): Se tiene entonces $\nabla w = S'_n(u)\nabla u$ y, por tanto, $\nabla w = 0$ c.p.d. en $\{x; |u(x)| \geq K\}$. Utilizando esta función en (5.54), obtenemos

$$\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla u S'_n(u) + \int_{\Omega} \Phi(u) \cdot \nabla u S'_n(u) + \lambda \int_{\Omega} u S_n(u) = \int_{\Omega} f S_n(u).$$

El primer término es mayor o igual que $\alpha \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2$. El segundo término es cero aplicando el Teorema de la Divergencia, ya que

$$\Phi(u) \cdot \nabla u S'_n(u) = \Phi(T_{2n}(u)) \cdot \nabla T_{2n}(u) S'_n(T_{2n}(u)) = \nabla \cdot \Psi_n(T_{2n}(u))$$

para

$$\Psi_n(t) = \int_0^t \Phi(s) S'_n(s) ds.$$

El tercer término es no negativo y el cuarto término es menor o igual que $n \int_{|u| \geq 2n} |f|$.

Veamos a continuación que la solución renormalizada es única. Llamemos v a la solución débil de un problema análogo a (1.1), donde $g \in L^\infty(\Omega)$ ocupa el segundo miembro. Es decir,

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla v) - \nabla \cdot \Phi(v) + \lambda v = g & \text{en } \Omega, \\ v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.56)$$

En la primera etapa de la sección 3, hemos visto que el problema (5.56) posee al menos una solución v y que $v \in L^\infty(\Omega)$, con $\|v\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\lambda}\|g\|_{L^\infty}$. Por otra parte, sea u^* una solución renormalizada de (1.1) y fijemos

$$K = \|v\|_{L^\infty} + 1, \quad w = \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v),$$

donde $0 < \delta < 1$ y Σ_δ es como en (3.25). Tenemos que $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Además,

$$\nabla w = \Sigma'_\delta(T_K(u^*) - v) \nabla(T_K(u^*) - v) = \frac{1}{\delta} \mathbf{1}_{\{|T_K(u^*) - v| < \delta\}} \nabla(T_K(u^*) - v)$$

y $\nabla w = 0$ c.p.d. en $\{x; |u^*(x)| \geq K\}$. En efecto, para x c.p.d. en Ω , si $|u^*(x)| \geq K$, entonces al mismo tiempo $|T_K(u^*)| = K$ y $|v(x)| \leq \|v\|_{L^\infty} = K - 1$; por tanto, $|T_K(u^*(x)) - v(x)| \geq 1$, el valor de $\mathbf{1}_{\{|T_K(u^*) - v| < \delta\}}(x)$ es 0 (recuérdese que $\delta < 1$) y $\nabla w(x) = 0$.

Utilizando la Definición 5.1, deducimos que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A\nabla u^* \cdot \nabla \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v) + \int_{\Omega} \Phi(u^*) \cdot \nabla \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v) \\ + \lambda \int_{\Omega} u^* \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v) = \int_{\Omega} f \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v). \end{cases}$$

Luego

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A\nabla T_K(u^*) \cdot \nabla(T_K(u^*) - v) \Sigma'_\delta(T_K(u^*) - v) \\ + \int_{\Omega} \Phi(T_K(u^*)) \cdot \nabla(T_K(u^*) - v) \Sigma'_\delta(T_K(u^*) - v) \\ + \lambda \int_{\Omega} u^* \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v) = \int_{\Omega} f \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v). \end{cases}$$

Por otra parte, utilizando la misma función $w = \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v)$ en la formulación débil de (5.56), se tiene que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A\nabla v \cdot \nabla(T_K(u^*) - v) \Sigma'_\delta(T_K(u^*) - v) \\ + \int_{\Omega} \Phi(v) \cdot \nabla(T_K(u^*) - v) \Sigma'_\delta(T_K(u^*) - v) \\ + \lambda \int_{\Omega} v \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v) = \int_{\Omega} g \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v). \end{cases}$$

Restando estas dos últimas igualdades, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} A \nabla(T_K(u^*) - v) \cdot \nabla(T_K(u^*) - v) \Sigma'_\delta(T_K(u^*) - v) \\ + \int_{\Omega} (\Phi(T_K(u^*)) - \Phi(v)) \cdot \nabla(T_K(u^*) - v) \Sigma'_\delta(T_K(u^*) - v) \\ + \lambda \int_{\Omega} (u^* - v) \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v) = \int_{\Omega} (f - g) \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v). \end{array} \right. \quad (5.57)$$

Estudiamos el comportamiento de cada uno de estos sumandos cuando $\delta \rightarrow 0$. El primero de ellos es evidentemente no negativo. El segundo coincide con

$$\frac{1}{\delta} \int_{|T_K(u^*) - v| < \delta} (\Phi(T_K(u^*)) - \Phi(v)) \cdot \nabla(T_K(u^*) - v)$$

razonando como en la tercera etapa de la demostración del Teorema 1.1 (ver (3.27)), llegaremos fácilmente a la conclusión de que esta integral tiende a 0 cuando $\delta \rightarrow 0$. Por otra parte, aplicando el Teorema de Lebesgue, vemos que el tercer término converge hacia

$$\lambda \int_{\Omega} (u^* - v) \operatorname{sign}(T_K(u^*) - v).$$

Pero $\operatorname{sign}(T_K(u^*) - v) = \operatorname{sign}(u^* - v)$. En efecto, si $|u^*(x)| \leq K$ entonces $T_K(u^*) = u^*$ y si $|u^*(x)| > K$ entonces

$$\operatorname{sign}(T_K(u^*) - v) = \operatorname{sign}(u^*) = \operatorname{sign}(u^* - v).$$

Por último, observemos que

$$\int_{\Omega} (f - g) \Sigma_\delta(T_K(u^*) - v) \leq \int_{\Omega} |f - g| = \|f - g\|_{L^1}.$$

De todo ello deducimos que

$$\lambda \|u^* - v\|_{L^1} \leq \|f - g\|_{L^1} \quad (5.58)$$

y esto debe ser cierto cualquiera que sea $g \in L^\infty(\Omega)$, cualquiera que sea la solución renormalizada u^* de (1.1) y cualquiera que sea la solución v de (5.56).

Supongamos ahora que f^ε está dada como en la sección 3 para cada $\varepsilon > 0$, es decir, $f^\varepsilon = T_{1/\varepsilon}(f)$. Si u^ε es una solución débil de $(3.1)_\varepsilon$, sabemos que $u^\varepsilon \rightarrow u$ en $L^1(\Omega)$ (por ejemplo), siendo u una solución renormalizada de (1.1). Como necesariamente

$$\lambda \|u^* - u^\varepsilon\|_{L^1} \leq \|f - f^\varepsilon\|_{L^1} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

se deduce que $u^* = u$, lo que prueba la unicidad de la solución renormalizada.

Nota 5.5 Tomando en (5.58) $f = f_1$ y funciones $g^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ que converjan hacia f_2 , hemos visto además que, si f_1 y f_2 pertenecen a $L^1(\Omega)$ y si u_1 y u_2 son las soluciones renormalizadas correspondientes, entonces

$$\lambda \|u_1 - u_2\|_{L^1} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^1}$$

Por tanto, la aplicación $f \rightarrow u$ que al segundo miembro de (1.1) le asocia la solución renormalizada correspondiente es continua (e incluso Lipschitziana) de $L^1(\Omega)$ en $L^1(\Omega)$.

References

- [1] DI PERNA, R.J.; LIONS, P.L.– *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability*. Ann. of Math. (2) 130 (1989), no. 2, 321–366.
- [2] BOCCARDO, L.; DÍAZ, J.I.; GIACHETTI, D.; MURAT, F.– *Existence of a solution for weaker form of a nonlinear elliptic equation*. Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems (Nancy, 1988), 229–246, Pitman Res. Notes Math. Ser., 208, Longman Sci. Tech., Harlow, 1989.
- [3] BOCCARDO, L.; DÍAZ, J.I.; GIACHETTI, D.; MURAT, F.– *Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivatives of non linear terms*. J. Differ. Eq. (to appear).
- [4] BOCCARDO, L.; GALLOUET, T.– *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*. J. Funct. Anal. 87, (1989), 149–169.
- [5] BOCCARDO, L.; GALLOUET, T.– *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures*. Comm. P.D.E. 17, (1992), 641–655.
- [6] BOCCARDO, L.; MURAT, F.; PUEL, J.P.– *Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems*. Ann. Mat. Pura Appl.(4) 152 (1988), 183–196.
- [7] LIONS, P.L.; MURAT, F.– *Solutions renormalisées d'équations elliptiques, à paraître*.